(66) 28/11

Θεώρημα

Έστω (E,ρ) μ.χ. Τότε: (E,ρ) πλήρης $\Longleftrightarrow$ (*)

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Για κάθε φθίνουσα } (\subseteq) \text{ ακολουθία } (K_\nu)_{\nu\in N} \text{ μη κενών κ κλειστών} \\ \text{υποσυνόλων του } E, \text{ με } \lim_{\nu\in N} \delta(K_\nu)=0 \text{ ισχύει } \bigcap_{\nu\in N} K_\nu \neq \emptyset \end{array} \right\}$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω (E,ρ) πλήρης μ.χ. Έστω τυχούσα φθίνουσα ακολουθία κλειστών, μη κενών υποσυνόλων $(K_\nu)_{\nu\in N}$ του E με $\lim_{\nu\in N}\delta(K_\nu)=0$
Θ.δ.ο. $\bigcap_{\nu\in N} K \neq \emptyset$. Θεωρούμε $a_\nu \in K_\nu$, $\nu\in N$. Τότε $(a_\nu)_{\nu\in N}$ εν E.
Θ.δ.ο. $(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική. Έστω ε τυχόν: $\varepsilon>0$.
Τότε $(\exists n)(\forall \nu\geq n): \delta(K_\nu)<\varepsilon$ (γιατί $\lim_{\nu\in N}\delta(K_\nu)=0$)
Ας είναι μ,ν εν N με $\mu\geq n$ κ $\nu\geq n \Rightarrow a_\mu \in K_\mu \subseteq K_n$ κ
$a_\nu \in K_\nu \subseteq K_n \Rightarrow \rho(a_\mu,a_\nu)<\delta(K_n)<\varepsilon$. Άρα $(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική $\xrightarrow{(E,\rho)\text{ πλήρης}}$
$\lim_{\nu\in N} a_\nu = l \in E$. Θ.δ.ο. $l\in \bigcap_{\nu\in N} K_\nu \neq \emptyset$.
Για τυχόν $k\in N$ η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ είναι υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in N}$ κ άρα $\lim_{\nu\geq k} a_\nu = l$. Όμως η $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ είναι ακολουθία εν K_k (γιατί: $\nu\geq k \Rightarrow K_\nu \subseteq K_k \Rightarrow a_\nu\in K_k$) και
$\lim_{\nu\geq k} a_\nu = l \in K_k$ (γιατί $(a_\nu)_{\nu\geq k}$ ανήκει στο K_k κ το K_k κλειστό)
Άρα $l\in K_k$, $k\in N \Rightarrow l\in \bigcap_{k\in N} K_k = \bigcap_{\nu\in N} K_\nu \neq\emptyset$

($\Leftarrow$) Έστω ισχύει η (*). Θ.δ.ο. (E,ρ) πλήρης.
Έστω $(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική ακολουθία εν E
$K_\nu=\{a_\mu : \mu\geq\nu\}\neq\emptyset$. (Ισχύει: $\lambda\geq k \Rightarrow K_\lambda\subseteq K_k \Rightarrow \overline{K_\lambda}\subseteq\overline{K_k}$)
Θεωρώ την ακολουθία $(\overline{K_\nu})_{\nu\in N}$, που είναι ακολουθία μη κενών, κλειστών συνόλων κ φθίνουσα. Θ.δ.ο. $\lim_{\nu\in N}\delta(\overline{K_\nu})=0$.
Έστω $\varepsilon>0$ (ε τυχόν). Επειδή η $(a_\nu)_{\nu\in N}$ βασική, υπάρχει n: $\forall\nu\geq n$ κ $\forall\mu\geq n$ να ισχύει: $\rho(a_\mu,a_\nu)<\varepsilon$
Ισχύει δηλ. $\delta(K_n)<\varepsilon \xrightarrow{\delta(K_n)=\delta(\overline{K_n})} \delta(\overline{K_n})<\varepsilon$
Όμως $(\forall\nu\geq n)$ έχουμε: $\delta(\overline{K_\nu})\leq\delta(\overline{K_n})\leq\varepsilon$ Άρα $\lim_{\nu\in N}\delta(\overline{K_\nu})=0$
Άρα από την υπόθεση: $\bigcap_{\nu\in N}\overline{K_\nu}\neq\emptyset$. Έστω $l\in\bigcap_{\nu\in N}\overline{K_\nu} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (\forall\nu\in N): l\in\overline{K_\nu}$. Ακόμη, για τυχόν $\nu\in N$ έχουμε $a_\nu\in K_\nu\subseteq\overline{K_\nu}$
Άρα $0\leq\rho(a_\nu,l)\leq\delta(\overline{K_\nu})\longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\nu\in N}\rho(a_\nu,l)=0 \Rightarrow \lim_{\nu\in N} a_\nu = l$
Η ακολουθία τυχούσα άρα ο χώρος είναι πλήρης

$(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική εν (E,ρ) (διακριτός μ.χ.)

Για $\varepsilon=\frac{1}{2}$, θα υπάρχει n: $\forall \mu\geq n$ κ $\forall \nu\geq n$ να ισχύει: $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)<\varepsilon=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall \mu\geq n$ κ $\forall \nu\geq n$: $\rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)=0 \Rightarrow \alpha_\mu=\alpha_\nu$ για μ,ν εν $\mathbb{N}$: $\mu\geq n$ κ $\nu\geq n$

$\Rightarrow (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή $\Rightarrow (\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

§ Ολικά φραγμένοι μ.χ. (Ορισμός)

- (E,ρ) ολικά φραγμένος $\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists A\subseteq E)$: A πεπερασμένο κ ε-πυκνό
  [A ε-πυκνό $\Leftrightarrow (\forall x\in E)(\exists y\in A): \rho(x,y)<\varepsilon$]
- $S\subseteq E$, S ολικά φραγμένο $\Leftrightarrow$ ο μ. υποχώρος (S,ρ_S) είναι ολικά φραγμένο

Πρόταση

(E,ρ) ολικά φραγμένος $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}(\forall\varepsilon>0) \text{ υπάρχει μία κάλυψη του E από} \\ \text{πεπερασμένο πλήθος σφαιρών ακτίνας } \varepsilon\end{array}\right\}$ (*)

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω (E,ρ) ολικά φραγμένος κ έστω $\varepsilon>0$. (ε τυχών)

Τότε, έστω $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ το πεπερασμένο κ ε-πυκνό υποσύνολο του E

$\mathcal{C}=\{B(\alpha_1,\varepsilon),\dots,B(\alpha_k,\varepsilon)\}$ Θ.δ.ο. $\bigcup\mathcal{C}=E$ ή $\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon)=E$

Ισχύει $\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon)\subseteq E$. Αρκεί ν.δ.ο. $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon)$

x τυχόν, $x\in E \xRightarrow{A \text{ είναι ε-πυκνό}} (\exists \alpha_j\in A): \rho(x,\alpha_j)<\varepsilon \Rightarrow$

$\exists j\in\{1,\dots,k\}: x\in B(\alpha_j,\varepsilon) \Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon)$

$(\Leftarrow)$ Έστω ισχύει η (*) κ έστω, επιπλέον, $\varepsilon>0$ (ε τυχών)

Από την υπόθεση $(*) \Rightarrow E=\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon)$ Έστω $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$

Θ.δ.ο. A είναι ε-πυκνό. Θεωρώ $x\in E=\bigcup_{i=1}^{k}B(\alpha_i,\varepsilon) \Rightarrow$

$\exists j\in\{1,\dots,k\}: x\in B(\alpha_j,\varepsilon) \Rightarrow \exists j\in\{1,\dots,k\}: \rho(x,\alpha_j)<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \alpha_j\in A): \rho(x,\alpha_j)<\varepsilon$. Άρα A είναι ε-πυκνό